

Eléments et extensions algébriques

- Cours d'algèbre, Perrin, p 66
- Théorie de Galois, Gossard, p 31
- 2 pingles

RFR

66

Def: Soit L/K une extension et soit $\alpha \in L$. Soit

$\varphi: K[x] \rightarrow L$ le morphisme d'algèbre

$$x \mapsto \varphi(x) = \alpha$$

1) Si φ est injectif, on dit que α est transcendant sur K .

2) Sinon, on dit que α est algébrique sur K , c'est-à-dire $\exists P \in K[x]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$.

En fait, si $I = \ker(\varphi)$, I est un idéal principal non nul (car $K[x]$ principal) donc $I = (\pi)$ avec $\pi \neq 0$ et ~~transcendant~~ on peut supposer π unitaire. On dit que π est le polynôme minimal de α sur K .

Def: On note $K[\alpha]$ le sous-anneau de L engendré par K et α . Ainsi:

$$K[\alpha] = \{ Q(\alpha) ; Q \in K[x] \}$$

On note $K(\alpha)$ le plus petit sous-corps de L contenant K et α . Ainsi:

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} ; P, Q \in K[x] \text{ et } Q(\alpha) \neq 0 \right\}$$

Théorème: Soit L/K extension et $\alpha \in L$. On a équivalence:

1) α algébrique sur K

2) $K[\alpha] = K(\alpha)$

3) $\dim_K(K[\alpha]) < +\infty$

Alors si π est le poly minimal de α sur K , π est irréductible sur K et on a que

$\dim_K K[\alpha] = [K[\alpha]:K] = \deg(\pi)$. On l'appelle degré de α .

Preuve: 1) $\Rightarrow$ 2): Soit α algébrique sur K et π

Seu polynôme minimal.

On a que $\text{Int}(f) = K[d]$ donc d'après le 1^{er} théorème d'isomorphisme:

$$K[x] / (\pi_d) \cong K[d]$$

~~Comme K est intègre, $K[d]$ est intègre donc~~
On a $K[d] \subset L$ donc est intègre, donc (π_d) est un idéal premier.

Comme $K[x]$ est principal, (π_d) est un idéal maximal, d'où $K[x] / (\pi_d)$ est un corps.

Donc $K[d]$ est un corps.

On a $K[d] \subset K(d)$. Et comme $K(d)$ est le + petit corps contenant K et d , $K(d) \subset K[d]$.

Donc $K[d] = K(d)$.

2) $\Rightarrow$ 1): On raisonne par contraposée. Si d transcendant sur K , alors $K[x] \neq K[d]$ par le 1^{er} théorème d'isomorphisme. Dans $K(x) \neq K(d)$.
Alors $K[d] \neq K(d)$ car $K[d]$ n'est pas un corps (x pas inversible dans $K[x]$) alors que $K(x)$ l'est.

3) $\Rightarrow$ 2): Par contraposée, si d transcendant sur K , $K[d] \neq K[x]$. On a $K[x]$ est un K -espace vectoriel de dimension infinie, donc $K[d]$ aussi.
On sait donc que si $[K(d):K] = m < +\infty$ alors la famille $(1, d, \dots, d^m)$ est liée donc il existe $p \in K[x] \setminus \{0\}$ tel que $p(d) = 0$.

1) $\Rightarrow$ 3): Soit π_d de degré m . Alors comme $K[x] / (\pi_d) \cong K[d]$, en effectuant une division

$M =$ fermeture algébrique de K dans L

euclidienne, on peut montrer que $(1, d, \dots, d^{n-1})$ est une base de $K[d]$ sur K .

602

3.1

- En effet cette famille est libre car si elle était liée, on aurait existence de $P \in K[x]$ non nul tel que $P(d) = 0$ et $\deg(P) \leq n-1 < \deg(\pi_d)$ (contradiction avec la minimalité de π_d)

- Elle est génératrice car soit $b \in K[d]$. Alors il existe $P \in K[x]$ tel que $b = P(d)$. Or, alors $P(x) = \pi_d(x) \cdot Q(x) + R(x)$ avec $Q, R \in K[x]$ et $\deg(R) < n$

On évalue en d : $P(d) = \pi_d(d) \cdot Q(d) + R(d) = b$

Donc $b \in \text{vect} \{ d^i; i \in \mathbb{N}; n-1 \leq i \}$

Théorème: Soit L/K extension. On pose

$M = \{ x \in L; x \text{ algébrique sur } K \}$

Alors M est un corps.

528

Preuve: Soit $\alpha, \beta \in M$ avec β non nul.

27

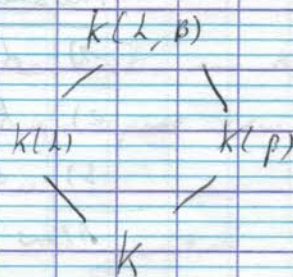
On suppose hypothèse que $[K(\alpha):K]$ et $[K(\beta):K]$ sont finies.

Après la multiplication des degrés,

on a que

$[K(\alpha, \beta):K]$

$= [K(\alpha, \beta):K(\alpha)] \times [K(\alpha):K]$



De plus, $[K(\alpha, \beta):K(\alpha)] \leq [K(\beta):K]$

En effet, le poly minimal de β sur $K(\alpha)$

divise le poly minimal de β sur K , on note m_p^K , car $m_p^K \in K[x]$ donc $m_p^K \in K(\alpha)[x]$ et s'annule en β donc c'est un multiple de

noté $m_p^{K(\alpha)}$

$\sup_p [K(\alpha^p) : K] = \infty$, On a donc :

$$[K(\alpha, \beta) : K] \leq [K(\beta) : K] \times [K(\alpha) : K] < +\infty$$

Donc $K(\alpha, \beta) / K$ est une extension algébrique sur K car finie.

On a $\alpha + \beta, \alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}$ sont dans $K(\alpha, \beta)$ donc sont algébriques sur K , donc appartiennent à M .
Donc M est un corps.

PER Exemple: Soit $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{C}; x \text{ algébrique sur } \mathbb{Q}\}$

67 Alors $\mathbb{Q}$ est un corps par ce qui précède, et il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ par définition.

En revanche l'extension $\mathbb{C} / \mathbb{Q}$ n'est pas finie car il existe des éléments de $\mathbb{C}$ de degré arbitrairement grande, par exemple $\sqrt[n]{2}$ qui est de degré n car $x^n - 2$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ comme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ Eisenstein.

602 Def: Soit L / K extension. On dit que L est une

63 clôture algébrique de K si L est algébrique sur K et L est algébriquement clos.

Exemple: $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

Prop: On suppose que L est algébriquement clos. Soit $\bar{K}$ la fermeture algébrique de K dans L . Alors $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K .

Preuve: $\bar{K}$ est algébrique sur K par définition.

On montre que $\bar{K}$ est algébriquement clos.

Soit $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \bar{K}[x]$ de degré ≥ 1

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, P possède une racine z dans $\mathbb{C}$: $P(z) = 0$.

Donc z est algébrique sur $\bar{K}$.

On veut montrer que $z \in \bar{K}$ donc que

$$[K(z) : K] < +\infty$$

On a $a_0 \in \bar{K}$ donc $[K(a_0) : K] < +\infty$.

De même, $[K(a_1) : K] < +\infty$.

Donc d'après la preuve d'un théorème précédent,

$$[K(a_1, a_0) : K] < +\infty$$

Et alors:

$$[K(a_2, a_1, a_0) : K]$$

$$= [K(a_2, a_1, a_0) : K(a_1, a_0)] \times [K(a_1, a_0) : K]$$

$< +\infty$ par les n arguments

Par récurrence immédiate:

$$[K(a_n, \dots, a_0) : K] < +\infty$$

Et alors:

$$[K(z, a_n, \dots, a_0) : K]$$

$$= [K(z, a_n, \dots, a_0) : K(a_n, \dots, a_0)]$$

$$\times [K(a_n, \dots, a_0) : K]$$

Et le 1^{er} terme est fini car z est algébrique sur $K(a_n, \dots, a_0)$.

Donc comme $z \in K(z, a_n, \dots, a_0)$ alors z est

~~est~~ algébrique sur K donc $z \in \bar{K}$.

Ainsi P possède une racine dans $\bar{K}$. Alors $\bar{K}$ est algébriquement clos.

Remarque:

602 1) Prop. Toute extension L/K de degré fini est algébrique sur K .

37

Preuve: Soit $n = [L : K]$. Soit $\alpha \in L$. Alors

$[K(\alpha) : K] \leq n$ dans la famille.

$(1, \alpha, \dots, \alpha^n)$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs dans E est liée. Ainsi il existe $a_0, \dots, a_n \in K$ non tous nuls tel que $a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n = 0$.

Donc on a trouvé un polynôme de $K[X]$ qui annule α . Donc α est algébrique sur K .

2) $\mathbb{Q}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

3) Le théorème de Steinitz dit que tout corps commutatif K admet une clôture algébrique, et celle-ci est unique à K -isomorphisme près.